Lösungsskizze Elektrodynamik Blatt 10

Stefan Walter

May 30, 2013

Lösung zu Aufgabe 3

Wir schreiben den Wechselstrom in der Antenne als

$$I(z,t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right) \sin(\omega t) \ , \tag{1}$$

wobei der Strom an den Enden der Antenne verschwindet $I(z = \pm l/2, t) = 0$ (stehende Welle). Wir benutzen nun die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \mathrm{div} j = 0 \tag{2}$$

und nehmen an, dass die Antenne einen Querschnitt F habe. Dann können wir die Kontinuitätsgleichung schreiben als

$$\frac{1}{F}\frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \, . \tag{3}$$

Daraus folgt die zeitabhängige Ladungsdicht als

$$\rho(z,t) = \frac{I_0 \pi}{F l \omega} \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) \cos(\omega t) \ . \tag{4}$$

Das Dipolmoment der Antenne lässt sich dann bestimmen als

$$p(t) = \int da \, z \, \rho(z,t) = F \int_{-l/2}^{l/2} dz \, z \, \rho(z,t) = I_0 \frac{2l}{\pi \omega} \cos(\omega t) \ . \tag{5}$$

Das elektrische und magnetische Feld in der Fernzone ist gegeben (siehe Blatt 10 Aufgaben 1 und 2) durch

$$E_\vartheta = B_\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{c^2 r} \ddot{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{6}$$

$$= -\frac{2 I_0 l}{\pi c^2} \frac{\sin\vartheta}{r} \cos\left(\omega(t - r/c)\right) \ . \tag{7}$$

Die mittlere Energieabstrahlung wir mit Hilfe des Poynting-Vektors

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \tag{8}$$

bestimmt und hat in unserem Falle nur radiale Anteile

$$S_r = \frac{I_0^2 l^2 \omega^2}{\pi^3 c^3} \frac{\sin^2\vartheta}{r^2} \cos^2\left(\omega(t - r/c)\right) \ . \tag{9}$$

Im zeitlichen Mittel $\langle\rangle$ strömt in den Raumwinkel $d\Omega$ die Energie $\langle dU \rangle$

$$\langle dU \rangle = \langle S_r \rangle r^2 d\Omega = \frac{I_0^2 l^2 \omega^2}{2\pi^3 c^3} \sin^2\vartheta \, . \tag{10}$$

D.h. auf einen Empfänger der senkrecht zum Radius stehende Fläche f fällt die Energie mit $d\Omega = f/r^2$ ab

$$-\frac{\langle dW \rangle}{dt} = \frac{I_0^2 l^2 \omega^2}{2\pi^3 c^3} \frac{8\pi}{3} = \frac{4 I_0^2 l^2 \omega^2}{3\pi^2 c^3} = \frac{2}{3} \frac{\langle \ddot{p}^2 \rangle}{c} \, , \tag{11}$$

was der allgemeinen Formel für den Energieverlust eines Hertzschen Dipols entspricht.