Übung 11 in Elektrodynamik FS 2013: Nachtrag

I. AUFGABE 1

Bemerkung: In der Übung war eigentlich nicht wirklich viel falsch, ich hatte nur leider einen Zwischenschritt nicht richtig aufgeschrieben und war darum an der Tafel verwirrt - der Zwischenschritt ist ein Ansatz für die Geschwindigkeit, siehe unten!

In einem Intertialsystem I existieren ein gleichförmige elektromagnetisches Feld $\vec{E}$ und ein gleichförmiges magnetisches Feld $\vec{B}$. Betrachte nun ein Intertialsystem I' mit einer relativen Geschwindigkeit $\vec{v}$ bezüglich I. In diesem System gilt (in der Wikipedia-Konvention von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mit den passenden Faktoren von Lichtgeschwindigkeit c)

$$\vec{E}' = \gamma \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) + (1-\gamma) \frac{\vec{E} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \vec{v} \,, \tag{1}$$

$$\vec{B}' = \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right) + (1-\gamma) \frac{\vec{B} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \vec{v} \,, \tag{2}$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Wir suchen nun $\vec{v}$ so, dass das $\vec{E}' \parallel \vec{B}'$. Diese Geschwindigkeit können wir in den Anteil $v_\parallel$ parallel und $v_\perp$ senkrecht zu der durch $\vec{E}' \parallel \vec{B}'$ definierten Richtung aufspalten. Wir stellen weiterhin fest, dass diese Wahl nicht eindeutig ist, denn man kann eine zweite Transformation in ein Intertialsystem I'' durchfüren, wobei die zweite Boost-Geschwindigkeit $\vec{v}'$ parallel zu der durch $\vec{E}' \parallel \vec{B}'$ definierten Richtung ist. Diese ändert allerdings nicht die elektromagnetischen Felder, $\vec{E}'' = \vec{E}'$ und $\vec{B}'' = \vec{B}'$, wie man leicht durch einsetzen in die Lorentz-Transformationen sehen kann. Zusammen mit der ersten Lorentz-Transformation erhalten wir eine Gesamt-Boost-Geschwindigkeit von $\vec{v}_{\mathrm{tot}} = \vec{v} + \vec{v}'$ mit $v_{\parallel,tot} = v_\parallel$ und $v_{\parallel,tot} = v_\parallel - v'$. Anders gesagt: wir können $v_{\parallel,tot}$ frei wählen (mittels der zweiten Transformation), und immernoch $\vec{E}'' = \vec{B}''$ haben. Wir wählen $v_{\parallel,tot} = 0$, weil das eine besonders einfache Wahl ergibt. Nun berechnen also, alles zusammengenommen (und unter Weglassens des Index tot), die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Boostes, nach dem gilt

- $\vec{E}' \parallel \vec{B}'$,
- $\vec{v} \perp \vec{E}' \parallel \vec{B}'$.

Aus $\vec{E}' \parallel \vec{B}'$ folgt, dass $\vec{E}' \times \vec{B}' = 0$ ist. Mit der obigen Lorentz-Transformation erhalten wir

$$\vec{E}' \times \vec{B}' = 0 = \gamma^2 \, \vec{E} \times \vec{B} - \gamma^2 \, \vec{E} \times \left(\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right) + \gamma^2 \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \times \vec{B} - \gamma^2 \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \times \left(\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right) + \vec{\xi} \,, \tag{3}$$

wobei ξ gegeben ist durch

$$\vec{\xi} = (1-\gamma) \frac{\vec{E} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \left(\vec{v} \times \vec{B}' \right) + (1-\gamma) \frac{\vec{B} \cdot \vec{v}}{\vec{v}^2} \left(\vec{E}' \times \vec{v} \right) \,. \tag{4}$$

Wir vereinfachen diese Gleichung nun mittels der folgenden Vektor-Identitäten

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) = \vec{B} \left(\vec{A} \cdot \vec{C} \right) - \vec{C} \left(\vec{A} \cdot \vec{B} \right) \,, \tag{5}$$

$$\left(\vec{A} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{C} = \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) \cdot \vec{A} = \left(\vec{C} \times \vec{A} \right) \cdot \vec{B} \tag{6}$$

aus denen auch folgt, dass

$$\left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \times \left(\vec{v} \times \vec{E} \right) = \vec{v} \left(\left(\vec{B} \times \vec{E} \right) \cdot \vec{v} \right) \tag{7}$$

ist. Man sieht dann durch einsetzen, dass der erste Term in Gleichung (3) in Richtung $\vec{E} \times \vec{B}$ zeigt, während alle anderen Terme (bis auf $\vec{\xi}$ und noch 2 weitere Terme, die proportional zu $\vec{E} \cdot \vec{v}$ und $\vec{B} \cdot \vec{v}$ sind) in Richtung $\vec{v}$ zeigen. Es macht also Sinn, den Ansatz

$$\vec{v} = \alpha \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \tag{8}$$

zu untersuchen. Mit diesem Ansatz gilt $\vec{E} \cdot \vec{v} = 0$ und $\vec{B} \cdot \vec{v} = 0$, und somit auch $\vec{\xi} = 0$, so dass in Gleichung (3) tatsächlich nur noch Terme in Richtung $\vec{v}$ und $\vec{E} \times \vec{B}$ übirg bleiben. Der Ansatz ist also konsistent und sinnvoll. Wir erhalten mit diesem Ansatz, und mittels der Vektor-Identitäten,

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{E} \times \vec{B} - \vec{E} \times \left(\frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right) + \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \times \vec{B} - \vec{v} \left(\left(\frac{\vec{B} \times \vec{E}}{c^2} \right) \cdot \vec{v} \right) & (9) \\ &= \vec{E} \times \vec{B} + \frac{\alpha}{c^2} \vec{E} \times \left(\vec{E} \times \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \right) - \alpha \vec{B} \times \left(\vec{B} \times \left(\vec{B} \times \vec{E} \right) \right) + \frac{\alpha^2}{c^2} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)^2 & (10) \end{aligned}$$

Die Vektor-Identitäten implizieren weiterhin, dass

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \left(\vec{E} \times \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \right) &= \vec{E} \times \left(\vec{E} \left(\vec{E} \cdot \vec{B} \right) - \vec{B}\, \vec{E}^2 \right) = - \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \vec{E}^2 \ , & (11) \\ \vec{B} \times \left(\vec{B} \times \left(\vec{B} \times \vec{E} \right) \right) &= - \left(\vec{B} \times \vec{E} \right) \vec{B}^2 = \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \vec{B}^2 \ , & (12) \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$0 = \vec{E} \times \vec{B} - \alpha \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) + \frac{\alpha^2}{c^2} \left(\vec{E} \times \vec{B} \right) \left| \vec{E} \times \vec{B} \right|^2 \ , \tag{13}$$

woraus folgt

$$0 = 1 - \alpha \left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) + \frac{\alpha^2}{c^2} \left| \vec{E} \times \vec{B} \right|^2 \ . \tag{14}$$

Diese quadratische Gleichung können wir wie folgt lösen

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right)^2 - \frac{4}{c^2} \left| \vec{E} \times \vec{B} \right|^2}}{2 \left| \vec{E} \times \vec{B} \right|^2} \tag{15}$$

Wir können nun noch verwenden, dass

$$|\vec{E} \times \vec{B}|^2 = \vec{E}^2\, \vec{B}^2 - (\vec{E} \cdot \vec{B})^2, \tag{16}$$

und erhalten

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right)^2 - \frac{4}{c^2} \left(\vec{E} \cdot \vec{B} \right)^2}}{2 \left| \vec{E} \times \vec{B} \right|^2} \tag{17}$$

Man erhält also als Geschwindigkeit

$$\vec{v} = c\, \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{E} \times \vec{B}|}\, \frac{\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} + \vec{B}^2 \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{\vec{E}}{c} \cdot \vec{B} \right)^2}}{2 \left| \frac{\vec{E}}{c} \times \vec{B} \right|} \ . \tag{18}$$

Damit nun die Geschwindigkeit immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, $|\vec{v}| \leq c$, müssen wir das Minus-Zeichen wählen (zum Testen kann man $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$ und $\vec{B} \parallel \vec{E}$ verwenden, in welchem Fall nur das Minus-Zeichen $\vec{v} = 0$ ergibt). Damit erhalten wir das Endergebnis

$$\vec{v} = c\,\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{|\vec{E}\times\vec{B}|}\,\frac{\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2}+\vec{B}^2\right)-\sqrt{\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2}-\vec{B}^2\right)^2-4\left(\frac{\vec{E}}{c}\cdot\vec{B}\right)^2}}{2\left|\frac{\vec{E}}{c}\times\vec{B}\right|}\;. \tag{19}$$